Vestibular FGV- 2024.1 Resolução Dissertativas

TP Classroom

GABARITO PROVA DISSERTATIVA ADM

QUESTÃO 1

A sensação térmica é uma medida de como as pessoas sentem frio quando expostas ao vento. Uma boa estimativa para sensação térmica pode ser encontrada usando a fórmula:

sensação térmica = (temperatura do ar) −0,7 × (velocidade do vento)

em que a temperatura do ar é medida em graus Fahrenheit (°F) e a velocidade do vento é medida em milhas por hora (mph).

a) Supondo que a temperatura do ar seja de 40°F e a velocidade do vento seja de 24 mph, calcule a sensação térmica.

b) Usando a relação 5F – 9C = 160, entre as medidas de temperatura em graus Fahrenheit (F) e graus Celsius (C), expresse, em graus Celsius, a sensação térmica calculada no item (a).

Resolução:

a) s: Sensação Térmica

$s = 40 - 0,7 \cdot 24 = 23,2\ ^oF$

$s = 23,2\ ^oF$

b) Temos:

$5 \cdot 23,2 - 9C = 160$

$C = \frac{-44}{9} \approx -4,89^oC$

$C = -4,89^oC$

QUESTÃO 2

Considere dois círculos concêntricos de centro O e raios diferentes.

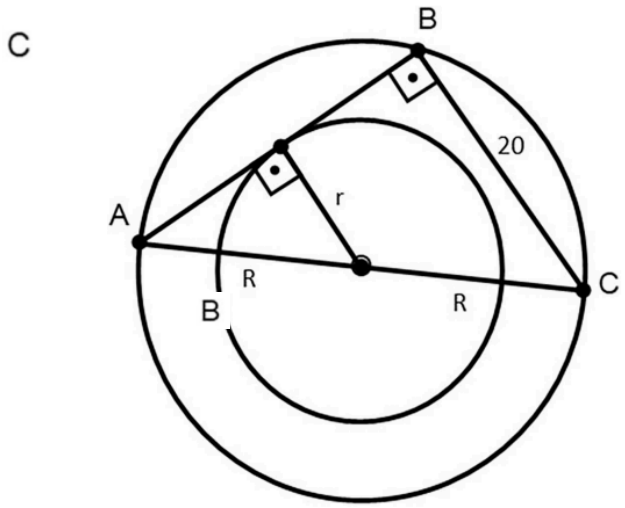
Sejam AB um diâmetro do círculo maior e AC uma corda do círculo maior que é tangente ao círculo menor no ponto T. O segmento BC mede 20 cm

a) Faça uma figura que descreva a situação apresentada.

b) Calcule o raio do círculo menor.

Resolução:

a)



b) Como AB é diâmetro, o triângulo ACB é retângulo em C.

Como AC é tangente à circunferência de raio r, então o triângulo ATO também é retângulo (em T).

O triângulo ACB é semelhante ao triângulo ATO (caso ângulo-ângulo), logo:

$$\frac{TO}{CB} = \frac{AO}{AB} \Rightarrow \frac{r}{20} = \frac{R}{2R} \Rightarrow \frac{r}{20} = \frac{1}{2} \Rightarrow \boxed{\mathbf{r = 10\ cm}}$$

TP Classroom

QUESTÃO 3

Seja M (a, b, c) a mediana dos três números reais a, b, c. Por exemplo, M(1, 2, 5) = 2 e M(100, 8, 50) = 50. Dois números reais distintos x e y são tais que:

$$\begin{cases} M(x, y, 20) = 8 \\ M(x, 2y, 20) = 12 \end{cases}$$

Determine **x** e **y**

Resolução:

Como M (x, y, 20) = 8, então devemos ter x = 8 ou y = 8.

Para x = 8, temos M (8, 2y, 20) = 12 e 2y = 12 → y = 6.

Para y = 8, temos M (x, 16, 20) = 12 e, assim, não há valor de x que satisfaça tal condição.

Desta forma, temos **x = 8 e y = 6.**

QUESTÃO 4 - Resolução

A sequência $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ é chamada de progressão harmônica quando todo termo an (com n > 1) é a média harmônica entre o antecessor e o sucessor, isto é,

$$a_n = \frac{2}{\frac{1}{a_{n-1}} + \frac{1}{a_{n+1}}}$$

Dada uma progressão harmônica $a_1, a_2, ..., a_n, ...$ defina uma nova sequência $b_1, b_2, ..., b_n, ...$ onde, para todo **n**,

$$b_n = \frac{1}{a_n}$$

a) Explique por que a sequência b_n é uma progressão aritmética

b) Calcule a_{2023} em função de b_1 e $r = b_2 - b_1$.

Resolução:

a) Como $b_n = \frac{1}{a_n}$, temos $b_1 = \frac{1}{a_1}$ $b_2 = \frac{1}{a_2}$ $b_3 = \frac{1}{a_n}$

Assim, $b_2 = \frac{1}{a_2} = \frac{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_3}}{2} = \frac{b_1 + b_3}{2}$

Como $b_2 = \frac{b_1 + b_3}{2}$ está provado que a sequência $b_1, b_2 b_3, ...$ é uma PA

b) Temos que:

$$a_{2023} = \frac{2}{\frac{1}{a_{2022}} + \frac{1}{a_{2024}}} = \frac{2}{b_{2022} + b_{2024}} =$$

$$= \frac{2}{b_1 + 2022r + b_2 + 2023r} = \frac{2}{2b_1 + 4044r} =$$

$$= \frac{2}{2(b_1 + 2022r)} = \frac{1}{b_1 + 2022r}$$

$$\boxed{a_{2023} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{b_1 + 2022r}}}$$

QUESTÃO 5 - Resolução

No Dia das Bruxas, as 37 crianças de uma turma resolveram ir à sala da diretora da escola para pedir doces. Como sempre acontece nesses dias, elas combinaram entre si que algumas delas sempre responderiam a verdade, outras sempre responderiam mentiras e as demais, alternadamente, responderiam verdades ou mentiras. Essas, as "alternadoras", escolheriam, cada uma delas, arbitrariamente a primeira resposta (verdade ou mentira) e depois alternariam os valores-verdade das respostas seguintes.

A diretora da escola, como sempre, fez a todas as crianças as mesmas três perguntas nesta ordem:

"Você sempre diz a verdade?". A diretora deu um doce para cada uma das 31 crianças que responderam "sim".

"Você é uma "alternadora"?". A diretora deu um doce para cada uma das 24 crianças que responderam "sim".
"Você sempre mente?". A diretora deu um doce para cada uma das 11 crianças que responderam "sim".

a) Quantas são as crianças "alternadoras" que começaram dizendo a verdade?

b) Quantos doces ao todo receberam as crianças que sempre mentem?

Resolução:

Sejam
x o número de crianças que sempre dizem a verdade,
y o número de crianças que sempre mentem e
z o número de crianças alternadoras.

Portanto: $x + y + z = 37$

Como tivemos 31 respostas "sim" e, consequentemente, 6 respostas "não" para a primeira pergunta que é "você sempre diz a verdade?", e lembrando que os que sempre dizem a verdade e os que sempre mentem irão respondê la com "sim", temos:

i. 6 são alternadoras que dizem a verdade dizendo “não”

ii. z – 6 são alternadoras que mentem dizendo “sim” Como tivemos 24 respostas “sim” e, consequentemente, 13 respostas “não” para a segunda pergunta, que é “você é uma alternadora?”, e:

iii. notando que os que só mentem junto com as (z – 6) alternadoras que mentiram na primeira pergunta responderão “sim” a essa pergunta, temos:

$y + (z - 6) = 24 \rightarrow y + z = 30 \rightarrow x = 7$

Como tivemos 11 respostas “sim” e, consequentemente, 26 respostas “não” para a terceira pergunta, que é “você sempre mente?”, e lembrando que os que sempre dizem a verdade e os que sempre mentem irão respondê-la com “não”, e

iv. notando que as 6 alternadoras dirão a verdade respondendo “não”, temos que as únicas crianças que dirão “sim” a essa pergunta são as (z – 6) alternadoras que agora mentirão. Logo:

$$z - 6 = 11 \longrightarrow z = 17$$

Assim, $x = 7$, $y = 13$ e $z = 17$.

RESPOSTAS:
a) São 6 crianças alternadoras que começaram dizendo a verdade.

b) Notando que as 13 crianças que sempre mentem disseram “sim” duas vezes, então elas ganharam 26 doces no total.

QUESTÃO 6

O jogo “Reduza a Palavra” é um quebra-cabeça, cujo objetivo é aplicar transformações sucessivas em uma palavra (sequências de caracteres ‘a’ e ‘b’) até reduzi-la à palavra ‘b’. As transformações permitidas são as trocas das seguintes sequências de caracteres:

1) ‘bab’ ⟶ ‘ba’
2) ‘abb’ ⟶ ‘ab’
3) ‘aba’ ⟶ ‘b’

Por exemplo, a palavra ‘bb’ pode ser transformada em ‘b’ através das seguintes transformações

- De ‘bb’ para ‘abab’ (por 3), pois (b)b (aba)b
- De ‘abab’ para ‘aba’ (por 1), pois a(bab) a(ba)
- De ‘aba’ para ‘b’ (através de 3)

Note que as trocas podem ocorrer nos dois sentidos: no exemplo acima trocamos ‘b’ por ‘aba’ (por 3) e também trocamos ‘aba’ por ‘b’ (também por 3).

a) Exiba uma série de transformações que reduzam a palavra ‘baba’ até ‘b’.

b) Explique por que a palavra ‘ababa’ não pode ser reduzida até ‘b’.

Resolução:
a) baba = bb (por 3, pois aba = b) bb = abab (por 3, pois b = aba) abab = aba (por 1, pois bab = ba) aba = b (por 3)

b) b = aba (por 3)

1º caso: aba = (abb)a (por 2) abba = (abb)ba (por 2)

2º caso: aba = (abb)a (por 2) abba = ab(bab) (por 1)

3º caso: aba = a(bab) (por 1) abab = a(bab)b (por 1)

4º caso: aba = a(bab) (por 1) abab = (abb)ab (por 2)

5º caso: aba = a(bab) (por 1) abab = ab(abb) (por 2)

Portanto, em nenhum dos casos conseguimos transformar b em ababa.

QUESTÃO 7

No sistema de coordenadas cartesianas, considere **M** pontos diferentes pertencentes ao semieixo positivo das abcissas e **N** pontos, também diferentes, pertencentes ao semieixo positivo das ordenadas.

Traçam-se os M x N segmentos de reta que unem cada um dos **M** pontos do semieixo das abcissas a cada um dos **N** pontos do semieixo das ordenadas.

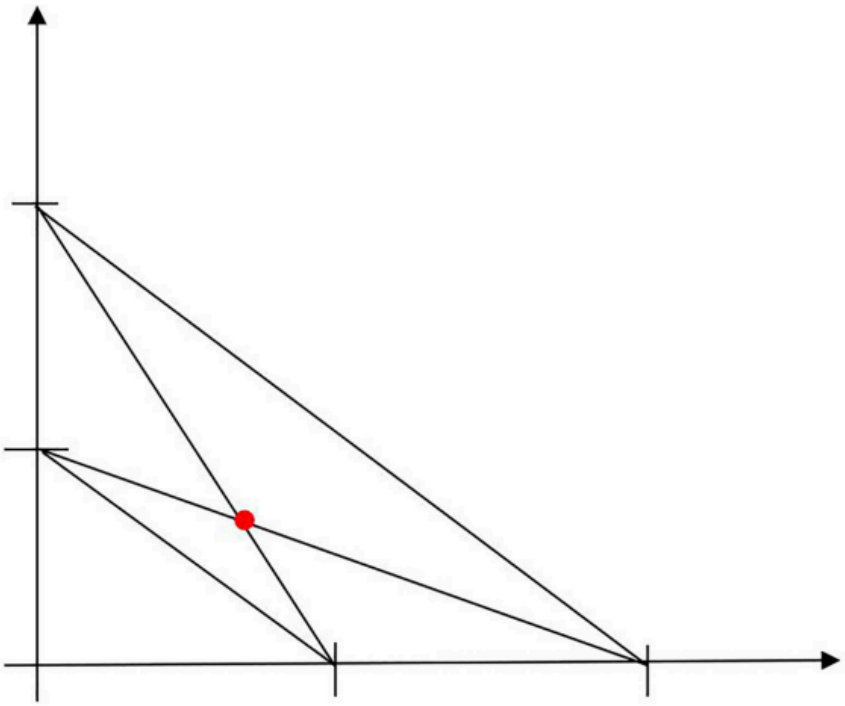
Em cada uma das duas situações a seguir, calcule o número máximo de pontos de interseção desses M x N segmentos de reta que pertençam ao interior do primeiro quadrante, isto é, os pontos de interseção que tenham as duas coordenadas maiores do que zero:

a) M = N = 2.

b) M = 8 e N = 6

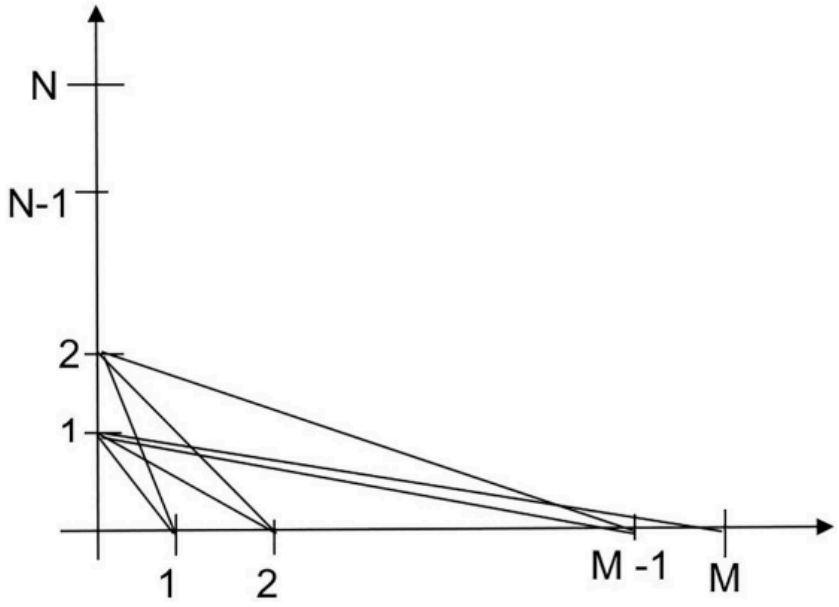
Resolução:

a)



Só há 1 ponto de interseção entre as retas

b)



Escolhendo o primeiro ponto das ordenadas, traçam- -se os segmentos de retas com os pontos da abscissa.

Primeiro caso:

1. Escolhe-se o segundo ponto e traçam-se os segmentos de retas com primeiro ponto da abscissa: 7 interseções

2. Traçam-se os segmentos de retas com segundo ponto da abscissa: 6 interseções

(...)

7. Traçam-se os segmentos de retas com sétimo ponto da abscissa: 1 interseção

8. Traçam-se os segmentos de retas com oitavo ponto da abscissa: 0 interseções

Somando: $7 + 6 + \ldots + 1 = \frac{8 \cdot 7}{2} = 28$

TP Classroom

Segundo caso:

1. Escolhe-se o terceiro ponto e traçam-se os segmentos de retas com primeiro ponto da abscissa: 2.7 interseções

2. Traçam-se os segmentos de retas com segundo ponto da abscissa: 2 . 6 interseções

(...)

7. Traçam-se os segmentos de retas com o sétimo ponto da abscissa: 2 . 1 interseções

8. Traçam-se os segmentos de retas com oitavo ponto da abscissa: 0 interseções

Somando: 2 . 7 + 2 . 6 + ... + 2 . 5 = 2 . 28

Terceiro caso:

1. Escolhe-se o quarto ponto e traçam-se os segmentos de retas com primeiro ponto da abscissa: 3.7 interseções

2. Traçam-se os segmentos de retas com segundo ponto da abscissa: 3 . 6 interseções

(...)

7. Traçam-se os segmentos de retas com sétimo ponto da abscissa: 3 . 1 interseções

8. Traçam-se os segmentos de retas com oitavo ponto da abscissa: 0 interseção

Somando: 3 . 7 + 3 . 6 + ... + 3 . 1 = 3 . 28

Quarto caso: 1. Escolhe-se o quinto ponto e traçam-se os segmentos de retas com primeiro ponto da abscissa: 4.7 interseções

2. Traçam-se os segmentos de retas com segundo ponto da abscissa: 4 . 6 interseções

(...)

7. Traçam-se os segmentos de retas com sétimo ponto da abscissa: 4 . 1 interseções

8. Traçam-se os segmentos de retas com oitavo ponto da abscissa: 4 . 0 interseções

Somando: 4 . 7 + 4 . 6 + ... + 4 . 1 = 4 . 28

Quinto caso:

1. Escolhe-se o sexto ponto e traçam-se os segmentos de retas com primeiro ponto da abscissa: 5 . 7 interseções

2. Traçam-se os segmentos de retas com segundo ponto da abscissa: 5 . 6 interseções

(...)

7. Traçam-se os segmentos de retas com sétimo ponto da abscissa: 5 . 1 interseções

8. Traçam-se os segmentos de retas com oitavo ponto da abscissa: 5 . 0 interseções

Somando: 5 . 7 + 5 . 6 + ... + 5 . 1 = 5 . 28

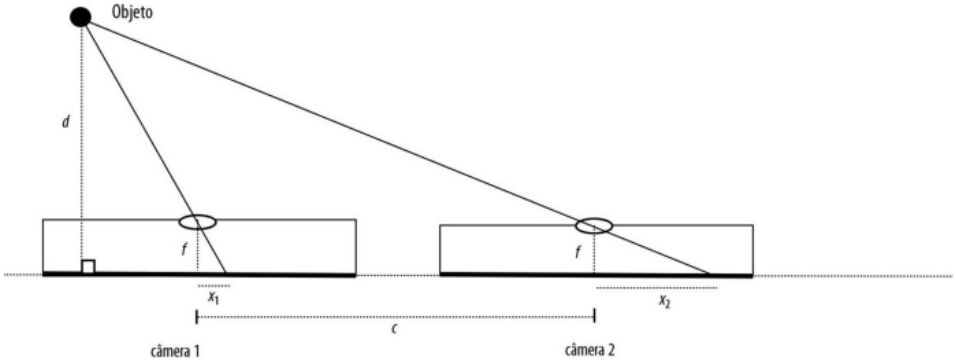
Portanto, somando todos os casos:

Total = 28 + 2 . 28 + 3 . 28 + 4 . 28 + 5 . 28
Total = 28[1 + 2 + 3 + 4 + 5] = 28 . 15
Total = 420 casos

TP Classroom

QUESTÃO 8 -

Um par de câmeras idênticas foi posicionado para realizar “visão estereoscópica”, que é um procedimento que usa as imagens de duas câmeras para estimar a distância de objetos. As câmeras têm distância focal f (a distância entre o furo por onde passa a luz e o plano de imagens da câmera – o plano que contém os sensores das câmeras). Suponha que a lente no furo não mude a trajetória dos raios de luz. As câmeras foram colocadas lado a lado, com seus furos afastados por uma distância c, como indica a figura.



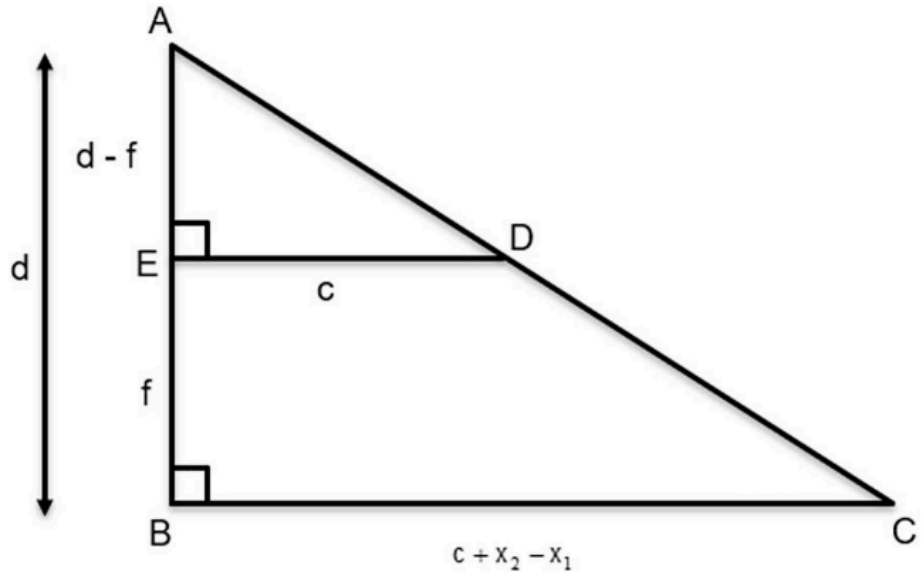
Certo objeto está a uma distância d do plano de imagens das câmeras (o plano que contém os sensores). Na imagem da câmera 1 (a da esquerda), o objeto aparece localizado em um pixel à direita do centro da imagem e a uma distância x1 deste centro. Já na imagem da câmera 2 (da direita), o objeto aparece localizado em um pixel também à direita do centro da imagem e a uma distância x2 deste centro, como mostra a figura.

a) Mostre que a distância d pode ser calculada em função de c, f, x1 e x2, por meio da expressão

$$d = f.\left(1 + \frac{c}{x_1 - x_2}\right)$$

b) Se f e c são valores pequenos, da ordem de poucos centímetros, e o objeto está a uma distância d muito grande, como a lua ou uma estrela, o que podemos dizer sobre a relação entre x_1 e x_2?

Resolução:



Os triângulos ABC e AED são semelhantes (caso ângulo-ângulo).

$$\frac{AE}{AB} = \frac{ED}{BC} \Rightarrow \frac{d-f}{d} = c + x_2 - x_1$$

$$(d - f) \cdot (c + x_2 - x_1) = c \cdot d$$

$$dc + dx_2 - dx_1 - cf - fx_2 + fx_1 = dc$$

$$d(x_2 - x_1) = f(c + x_2 - x_1)$$

$$d = \frac{f(c + x_2 - x_1)}{x_2 - x_1}$$

$$d = f \quad 1 + \left(\frac{c}{x_2 - x_1}\right) \cdot c \cdot q \cdot d$$

b) Podemos dizer que x_1 está muito próximo de:

$x_2 (x_1 = x_2)$