Resolução FGV 2024.2

Prova de Matemática Discursiva

TP Classroom

TP Classroom

Questão 1

Sejam M_0 a quantidade de sapinhos marrons no início, A_0 a quantidade de sapinhos amarelos no início, M a quantidade de sapinhos marrons no final e A a quantidade de sapinhos amarelos no final. O enunciado nos diz que $M_0 = 2A_0$ e que $\frac{M}{A} = \frac{5}{4}$. Como 8 sapinhos marrons foram para o Sol, tornaram-se amarelos, do mesmo modo, 2 sapinhos amarelos se tornaram marrons, logo, $A = A_0 + 6$ e $M = M_0 - 6$. Agora temos condições de resolver a questão:

$$\frac{M}{A} = \frac{5}{4} \iff 4(M_0 - 6) = 5(A_0 + 6) \iff 4M_0 - 5A_0 = 54 \implies$$

$$\implies 4 \cdot (2A_0) - 5A_0 = 54 \iff 3A_0 = 54 \iff A_0 = 18,\ M_0 = 36,\ \mathrm{M}{=}30,\ \mathrm{A}$$

A diferença entre M e A é, portanto, $\boxed{30 - 24 = 6.}$

Questão 2

a)

O encontro da reta $y = x + 2$ com a parábola $y = x^2 + 1$ é dado pe
solução do sistema composto por suas duas equações:

$$\begin{cases} y = x + 2 \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \iff x + 2 = x^2 + 1 \iff x^2 - x - 1 = 0$$

Resolvendo a equação quadrática, obtemos $x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$, portanto, as curv
se intersectam em dois pontos distintos não ocorrendo assim a tangência ent
elas.

b)

Para que haja tangência, basta impormos que a equação quadrática obtida ao se resolver o sistema admita apenas uma única raíz real, ou seja, é suficiente impor $\Delta = 0$ na expressão quadrática final.

$$\begin{cases} y = mx \\ y = x^2 + 1 \end{cases} \iff mx = x^2 + 1 \iff x^2 - mx + 1 = 0$$

$$\Delta = 0 \iff m^2 - 4 = 0 \iff \boxed{m = \pm 2}$$

Questão 3

a)

Enumerem-se os vértices do tetraedro com os números $1, 2, 3$ e 4. Sejam V_1 o valor do vértice enumerado 1, V_2 o valor do vértice 2, V_3 o valor do vértice 3 e V_4 o valor do quarto vértice. O enunciado nos diz que:

$$V_1 + V_2 + V_3 + V_4 = 2024$$

Denote-se por A_{ij} o valor da aresta que conecta o vértice i ao vértice j, por exemplo, A_{13} conecta o vértice 1 ao vértice 3 e denotemos por S a soma desejada dos valores de todas as arestas:

$$S = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{4}\sum_{j=1, i\neq j}^{4} A_{ij}$$

Como partem de cada vértice exatamente 3 arestas distintas, ao somar os valores de cada aresta do tetraedro, repetimos o valor de cada vértice exatamente 3 vezes, logo,

$$S = 3(V_1 + V_2 + V_3 + V_4)\boxed{= 6072.}$$

b)

Cada aresta é compartilhada por exatamente duas faces distintas, então, ao somar os valores das arestas de cada uma das faces do tetraedro, repetimos cada valor de aresta exatamente duas vezes, logo, o valor do tetraedro é dado por $2S = 2 \cdot 6072\boxed{= 12144.}$

TP Classroom

Questão 4

a)

$$f_3(x) = (1-x)^2 + (2-x)^2 + (3-x)^2 =$$
$$= (1 - 2x + x^2) + (4 - 4x + x^2) + (9 - 6x + x^2) =$$
$$= 14 - 12x + 3x^2$$

Basta impor $f_3(x) = 29$, daí:

$$14 - 12x + 3x^2 = 29 \iff 3x^2 - 12x - 15 = 0 \iff$$
$$\iff x^2 - 4x - 5 = 0 \iff (x-5)(x+1) = 0$$

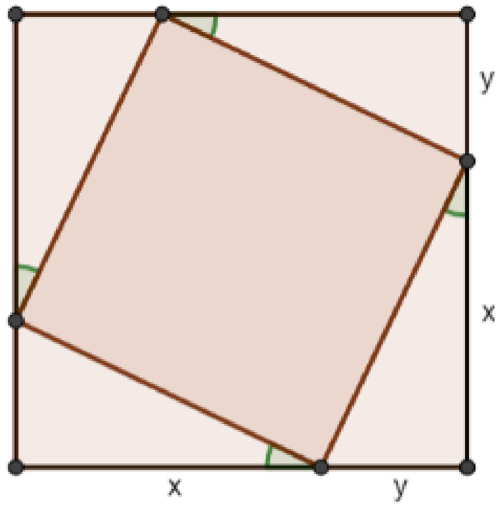
Portanto, ou $x = 5$, ou $x = -1$ e o conjunto solução é $S = \{-1, 5\}$.

b)

$$f_n(x) = \sum_{i=1}^{n}(i-x)^2 = \sum_{i=1}^{n}(i^2 - 2ix + x^2) =$$
$$= x^2(\sum_{i=1}^{n} 1) - 2x(\sum_{i=1}^{n} i) + (\sum_{i=1}^{n} i^2) =$$
$$= nx^2 - 2x \cdot \frac{n(n+1)}{2} + (\sum_{i=1}^{n} i^2) =$$
$$= nx^2 - xn(n+1) + (\sum_{i=1}^{n} i^2)$$

Temos uma função quadratica em x cujos coeficientes são $a = n, b = -n(n+1)$ e $c = (\sum_{i=1}^{n} i^2)$. Como $a > 0$, sabemos que a parábola admite um mínimo em seu vértice cuja coordenada x_{vert} é dada por $x_{vert} = -\frac{b}{2a} = \frac{n(n+1)}{2n} \boxed{= \frac{n+1}{2}}$.

Questão 5



No quadrado menor $A = 5 \implies \ell_1 = \sqrt{5}$.
No quadrado maior $A = 9 \implies \ell_2 = 3$.

a)

Como os 4 triângulos são congruentes, eles têm a mesma área, $A_\triangle$. A área do quadrado menor mais a área dos 4 triângulos deve ser igual à área do quadrado maior.

$$A_1 + 4A_\triangle = A_2 \iff 5 + 4A_\triangle = 9 \iff \boxed{A_\triangle = 1}$$

A área de um desses triângulos é igual a uma unidade de área.

b)

Temos os triângulos de catetos x e y e hipotenusa $\sqrt{5}$ (que é o lado do quadrado menor) e $x + y = 3$, pois a soma é o lado do quadrado maior.

$$\begin{cases} x + y = 3 \\ x^2 + y^2 = 5 \end{cases} \implies x^2 + (3 - x)^2 = 5 \iff x^2 + 9 - 6x + x^2 = 5 \iff$$

$$\iff 2x^2 - 6x + 4 = 0 \iff x^2 - 3x + 2 = 0 \iff (x - 1)(x - 2) = 0$$

Logo, $x_1 = 2$ é o cateto maior e $x_2 = 1$ é o cateto menor. A razão, portanto, é $\boxed{\dfrac{1}{2}}$.

TP Classroom

Questão 6

a)

Ouro $\rho_o = 20 \text{ g/cm}^3$ Prata $\rho_p = 10 \text{ g/cm}^3$
Sabemos que:

$$\rho = \frac{m}{V} \iff V = \frac{m}{\rho}$$

Para o ouro, temos $V_o = \frac{m_o}{\rho_o} = \frac{75}{20} = 3,75 \text{ cm}^3$.
Para a prata, temos $V_p = \frac{m_p}{\rho_p} = \frac{25}{10} = 2,5 \text{ cm}^3$.
O volume total é dado por $V = V_o + V_p \boxed{= 3,75 + 2,5 = 6,25 \text{ cm}^3}$.

b)

Pelo princípio de Arquimedes, o volume do objeto é igual ao volume de água deslocado.

$$V_{objeto} = V_o + V_p = \frac{m_o}{\rho_o} + \frac{m_p}{\rho_p}$$

O peso P do colar é $P = m_o + m_p \iff m_p = P - m_o$. Portanto:

$$V_{objeto} = \frac{x}{\rho_o} + \frac{P - x}{\rho_p} = \frac{x\rho_p + (P - x)\rho_o}{\rho_o \rho_p} = \frac{x(\rho_p - \rho_o) + P\rho_o}{\rho_o \rho_p}$$

O volume deslocado é $V_d = A_b h = \ell^2 h$.
Assim, temos:

$$\frac{x(\rho_p - \rho_o) + P\rho_o}{\rho_o \rho_p} = \ell^2 h \implies$$

$$\implies \frac{x(10 - 20) + 20P}{200} = 4D \iff x(-10) = 800D - 20P \iff$$

$$\iff \boxed{x = 2P - 80D}$$

Como queríamos demonstrar.

Questão 7

Para que a soma dê 4 temos os seguintes casos:

i O 1º dado dá 4: $\underset{1}{\underline{4}} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} = 216$ casos.

ii Os dois primeiros dados dão 1 ou 3: $\underset{1}{\underline{1}} \cdot \underset{1}{\underline{3}} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} = 2! \cdot 6 \cdot 6 = 72$ casos.

iii Os dois primeiros dados dão 2: $\underset{1}{\underline{2}} \cdot \underset{1}{\underline{2}} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} = 36$ casos.

iv Dois dos 3 primeiros dados são 1 e o outro 2: $\underset{1}{\underline{1}} \cdot \underset{1}{\underline{1}} \cdot \underset{1}{\underline{2}} \cdot \underset{6}{\underline{\ \ }} = \frac{3!}{2!} \cdot 6 = 18$ casos.

v Todos os dados dão 1, temos apenas um caso.

Casos desejados: $216 + 72 + 36 + 18 + 1 = 343$.
Casos possíveis: $6^4 = 1296$, logo, a probabilidade desejada é:

$$\boxed{P = \frac{343}{1296} \approx 26,5\%}$$

Questão 8

a)

$C_{n+1} = C_n \cdot (r \cdot d^n)$ para $r = 32, d = \frac{1}{2}$ e $C_0 = 1$.

$$C_1 = C_0(r \cdot d^0) = 1 \cdot (32 \cdot (\frac{1}{2})^0) = 32$$

$$C_2 = C_1(r \cdot d^1) = 32(32 \cdot \frac{1}{2}) = 32 \cdot 16 = 512$$

$$C_3 = C_2(r \cdot d^2) = 512 \cdot 32 \cdot \frac{1}{4} \boxed{= 4096}$$

b)

$C_n > C_{n+1} \iff C_n > C_n \cdot r \cdot d^n$. Como $C_n > 1$ para os primeiros valores de n (isto é $0, 1, 2, 3, ..., k$), temos

$$C_n > C_{n+1} \iff 1 > rd^n \iff \frac{1}{r} > d^n \iff$$

$$\iff \frac{1}{32} > (\frac{1}{2})^n \iff \frac{1}{2^5} > \frac{1}{2^n} \iff 2^n > 2^5 \iff n > 5$$

Portanto, a partir de $n = 6$ a sequência passa a decrescer. Observa-se que $C_5 = C_6$.

TP Classroom